



VOL. 18, Nº 3 (sept.-diciembre 2014)

ISSN 1138-414X (edición papel)

ISSN 1989-639X (edición electrónica)

Fecha de recepción 25/11/2013

Fecha de aceptación 10/03/2014

## CAMINOS DE APRENDIZAJE EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: OBJETIVOS, TAREAS Y EVALUACIÓN

*Learning paths in training mathematical teachers: goals, tasks and assessment.*



Pedro Gómez\*, María J. González\*\* e Isabel Romero\*\*\*

\*Universidad de Los Andes, Bogotá (Colombia)

\*\* Universidad de Cantabria

\*\*\*Universidad de Almería

E-mail: [argeifontes@gmail.com](mailto:argeifontes@gmail.com), [gonzalelm@unican.es](mailto:gonzalelm@unican.es), [imromero@ual.es](mailto:imromero@ual.es)

### Resumen

*Inspirados en la idea seminal de Simon sobre trayectoria hipotética de aprendizaje, en este artículo introducimos la noción de camino de aprendizaje de una tarea. Con base en esa noción, presentamos un procedimiento para caracterizar un objetivo de aprendizaje. Mostramos la utilidad de este tipo de caracterización en dos aspectos de la práctica del profesor de matemáticas: el análisis de la contribución de una tarea y una secuencia de tareas al logro de un objetivo de aprendizaje; y la recolección y análisis de información para la evaluación del aprendizaje. Ejemplificamos y reflexionamos sobre estas ideas en el contexto de programas de formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria.*

**Palabras clave:** *Análisis y mejora de tareas, caminos de aprendizaje, evaluación, formación de profesores de matemáticas, objetivo de aprendizaje, trayectoria hipotética de aprendizaje*

## Abstract

*Inspired in Simon's seminal idea of hypothetical learning trajectory, in this article we introduce the notion of learning path of a task. Based on this notion, we present a procedure for characterizing a learning goal. We show the usefulness of this kind of characterization in two aspects of mathematics teachers' practice: analyzing the contribution of a task and of a sequence of tasks to the attainment of a learning goal; and collecting and analyzing information for learning assessment. We illustrate and reflect on these ideas and procedures in the context of secondary mathematics teacher education programs.*

**Key words:** *Analysis and tasks improvement, learning paths, assessment, mathematics teachers training, learning goal, hypothetical learning trajectory*

## 1. Introducción

Algunos expertos consideran que la planificación de la enseñanza debería guiarse por los objetivos de aprendizaje que se quieren alcanzar (John, 2006, p. 491) y debería poner el foco de atención en (a) la selección y modificación de las tareas que pueden contribuir a esos objetivos de aprendizaje y (b) en la medida y la manera en que esas tareas pueden contribuir al logro de esos objetivos de aprendizaje (Liljedahl, Chernoff y Zazkis, 2007; Sherin y Drake, 2009). Por otro lado, esas tareas deberían formar parte integral de un proceso de evaluación focalizado en el aprendizaje de los escolares (Harlen y Winter, 2004). No obstante, aunque muchos profesores de matemáticas formulan objetivos de aprendizaje en su práctica docente, usualmente lo hacen redactando frases cortas cuyo significado se supone evidente (Lupiáñez, 2009), sin constatar la complejidad de esas formulaciones (Mousley, 2004).

Por otro lado, los profesores de matemáticas tienden a seleccionar, modificar e implementar tareas con el propósito de contribuir al aprendizaje de los escolares, pero no necesariamente prevén en qué medida y de qué manera esas tareas pueden lograr esos propósitos (Sullivan, Clarke, Clarke y O'Shea, 2010). De manera similar, tradicionalmente, en la enseñanza de las matemáticas, primero se aprende y después se evalúa (Santos, 2011) y los profesores no necesariamente aprecian la función de la evaluación como medio para el aprendizaje (William, Lee, Harrison y Black, 2004).

En este artículo, abordamos, de manera parcial, estas cuestiones al proponer un concepto pedagógico, los caminos de aprendizaje de una tarea, con el que es posible caracterizar un objetivo de aprendizaje y, al hacerlo, establecer cómo una tarea contribuye a ese objetivo de aprendizaje y a evaluar la actuación de escolares durante la instrucción. Estas actividades son propias de la práctica profesional de cualquier profesor. Nosotros nos referiremos únicamente a la utilidad de estas ideas y actividades para programas de formación de profesores, debido al requerimiento de tiempo que necesita el tipo de análisis que proponemos. Como detallaremos más adelante, los caminos de aprendizaje de una tarea son las previsiones del profesor sobre la actuación del estudiante en términos de las capacidades que los escolares pueden activar y los errores en los que ellos pueden incurrir al abordar esa tarea. Esta noción se inspira y se relaciona con la idea de trayectoria hipotética de aprendizaje que describimos brevemente a continuación.

En su artículo seminal, Simon (1995) indica que una trayectoria hipotética de aprendizaje está compuesta por "la consideración del objetivo de aprendizaje, las actividades de aprendizaje, y el pensamiento y el aprendizaje en el que los escolares se implican" (p. 133). Por consiguiente, la trayectoria hipotética de aprendizaje parte del objetivo de aprendizaje y sirve para guiar la instrucción, al atender a las actividades que se proponen a

los escolares y a sus procesos de pensamiento y aprendizaje. De esta forma, la instrucción se puede basar en cómo el aprendizaje progresa en la realidad (Wilson, Sztajn y Edgington, 2013, p. 137).

La revista *Mathematics Thinking and Learning* publicó en 2004 un número especial — 6(2) — sobre la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje. En este número se aprecia una gran diversidad de interpretaciones y aproximaciones a la noción. En particular, algunos investigadores consideran que la construcción de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje es responsabilidad del investigador (Clements y Sarama, 2004; Lesh y Yoon, 2004; Steffe, 2004), mientras que otros autores ponen el énfasis en que las trayectorias hipotéticas de aprendizaje deben ser una herramienta para la planificación del profesor (Gravemeijer, 2004; Simon y Tzur, 2004).

Adicionalmente, algunos autores consideran trayectorias hipotéticas de aprendizaje que abarcan varias sesiones de clase (Steffe, 2004), mientras que otros las desarrollan para una sesión de clase concreta (Simon y Tzur, 2004). Más recientemente, se han usado definiciones más amplias (Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica y Myers, 2009) y se ha mostrado cómo la noción se puede usar en los procesos de reforma en Estados Unidos (Corcoran, Mosher y Rogat, 2009). Simon y Tzur (2004) la caracterizan de manera concreta, al identificar tres elementos básicos de una trayectoria hipotética de aprendizaje: (a) los objetivos de aprendizaje, (b) las tareas y (c) las hipótesis sobre cómo se desarrolla el aprendizaje.

Investigaciones recientes con profesores en formación han constatado que la introducción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje mejora sus habilidades para usar el pensamiento de los escolares (Clements, Sarama, Spitler, Lange y Wolfe, 2011); guía sus decisiones de instrucción (Wilson, 2009); y mejora su conocimiento del contenido matemático, proporciona mejores modelos del pensamiento del escolar y facilita la incorporación de estos modelos en la enseñanza (Corcoran et al., 2009). Estas investigaciones ponen de manifiesto que el desarrollo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje es un desafío para la Educación Matemática (Steffe, 2004) pero que, además, es necesario transformarlas en herramientas para el profesor (Daro, Corcoran y Mosher, 2011) e investigar en la enseñanza y aprendizaje de la noción en programas de formación de profesores de matemáticas (Wilson et al., 2013).

## 2. Caminos de aprendizaje y objetivos

Para planificar la enseñanza de cualquier tema de las matemáticas escolares, el profesor ha de establecer lo que espera aprendan los estudiantes. Dichas expectativas de aprendizaje se pueden establecer a distintos niveles. En este trabajo, adoptamos dos niveles de concreción que denominamos objetivos y capacidades. Seguidamente introducimos la noción de capacidad que nosotros utilizamos y que forma parte esencial de la noción de camino de aprendizaje. Más adelante introduciremos la noción de objetivo.

Definimos una capacidad como una expectativa del profesor sobre el conjunto de conocimientos elementales y de procedimientos rutinarios que los estudiantes tienen que aprender sobre un tema de las matemáticas escolares. Corresponden al nivel cognitivo más bajo. Una capacidad aislada se manifiesta mediante la conducta observable de un estudiante cuándo ejecuta una tarea rutinaria asociada a un tema matemático.

Por ejemplo<sup>1</sup>, en el tema permutaciones sin repetición para estudiantes de 16 años, “hacer uso de diagramas de árbol para realizar conteo de permutaciones posibles” es una capacidad.

Las capacidades intervienen en el desarrollo de conocimientos más elaborados y permiten describir procesos de resolución de tareas complejas. En efecto, durante el proceso de resolución de una tarea matemática de una cierta complejidad, la conducta observable del estudiante se puede describir mediante una sucesión ordenada de capacidades. Además, el profesor puede prever que, cuando los estudiantes resuelven una tarea, ellos pueden incurrir en errores propios del tema; estos errores también se pueden registrar de forma ordenada e intercalada con las capacidades. La noción de camino de aprendizaje capta estas ideas en el contexto en el que el profesor planifica y hace hipótesis sobre la manera de proceder de sus estudiantes. Un camino de aprendizaje de una tarea es una sucesión de capacidades que el profesor prevé que sus estudiantes activarán al resolver la tarea, junto con los errores en los que pueden incurrir.

Veamos un ejemplo en la tarea denominada T1.Letras. Podemos encontrar las capacidades a las que se refieren estos caminos en el anexo 1 y los errores en el anexo 22.

T1.Letras. ¿De cuántas maneras posibles puedo ubicar las letras A, B, C y D seguida una de la otra y teniendo en cuenta que ninguna de ellas se puede repetir?

Un camino de aprendizaje de esta tarea aparece en la figura 1.

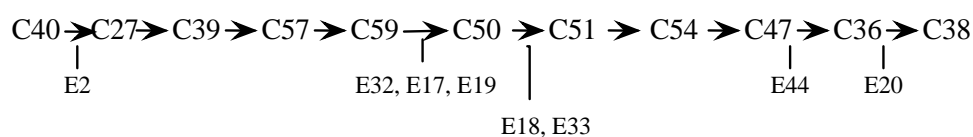


Figura 1. Camino de aprendizaje de una tarea

En este camino de aprendizaje se aprecia la siguiente previsión que hace el profesor sobre la actuación de sus estudiantes: la lectura del enunciado les evocará la noción de permutación como concepto que permite resolver la tarea (C40); continuarán extrayendo del enunciado aquellos datos que utilizarán para realizar el cálculo de permutaciones (C27); en ese momento, podrían incurrir en el error (E2) de tomar elementos repetidos; seguidamente, plantearán distintos sistemas de representación útiles al cálculo de permutaciones (C39); reconocerán que no es necesario emplear una fórmula para hacer el cálculo (C57), por lo que utilizarán un sistema de representación como herramienta de conteo (C59); en ese momento, podrían incurrir en errores como presentar una fórmula pero no desarrollarla (E32), fijar sólo algunos valores en ella y no lograr concretar un resultado (E17) o repetir una variable a pesar de haberla fijado (E19); si no se presentan esos errores, los estudiantes elegirán una lista como sistema de representación y reconocerán un patrón de orden al construir las listas que les ayude a evitar repeticiones en los arreglos (C50); pero es posible que no incluyan la

<sup>1</sup> En este texto utilizamos ejemplos producidos por el grupo 5 de MAD 2, compuesto por el grupo de profesores de secundaria David Benavides, Andrés Carrillo, Milena Ortiz, Sara Parra y Carlos Velasco. MAD 2 (segunda edición de la Maestría en Análisis Didáctico) es un máster en Educación Matemática que se ofrece en la Universidad de los Andes, en Bogotá, Colombia, y en el que participamos como formadores y tutores. Los ejemplos que utilizamos en este trabajo están basados en el tema matemático “Permutaciones sin repetición” sobre el que ha trabajado este grupo. Sus propuestas nos han inspirado para seguir profundizando en los ejemplos y desarrollos que aportamos aquí. Los otros grupos de este programa de formación han utilizado estas mismas ideas en otros temas de las matemáticas escolares: cálculo de áreas por composición y descomposición, producto notable de la forma  $(a \pm b)^2$ , introducción a la idea de límite, y área de regiones sombreadas

<sup>2</sup> Estos anexos se pueden descargar en <http://cl.ly/3h3l0l130W0f>

cantidad de arreglos que obtuvieron al fijar la primera variable en el resultado final (E18), o que obtengan una respuesta incompleta por ensayo y error (E33); si identifican un patrón de orden adecuado, asociarán cada arreglo de la lista con una permutación (C51) y expresarán los arreglos utilizando el sistema de representación elegido (C54), interpretando el resultado en el contexto de la tarea (C47); en este momento, pueden incurrir en el error de expresar un número de permutaciones sin repetición mayor o menor al esperado (E44); realizarán el conteo de los arreglos obtenidos utilizando diagramas y expresarán la cantidad resultante (C36); es posible que la solución que obtengan sea un número incoherente con los datos de la tarea por conteo incorrecto o incompleto (E20); finalmente, justificarán la respuesta obtenida relacionando la cantidad de permutaciones encontrada con la pregunta planteada (C38).

Debido a que una tarea se puede resolver de distintas formas, el profesor puede prever distintos caminos de aprendizaje para ella. La figura 2 presenta, en forma de grafo, cinco caminos de aprendizaje previstos para la tarea T1

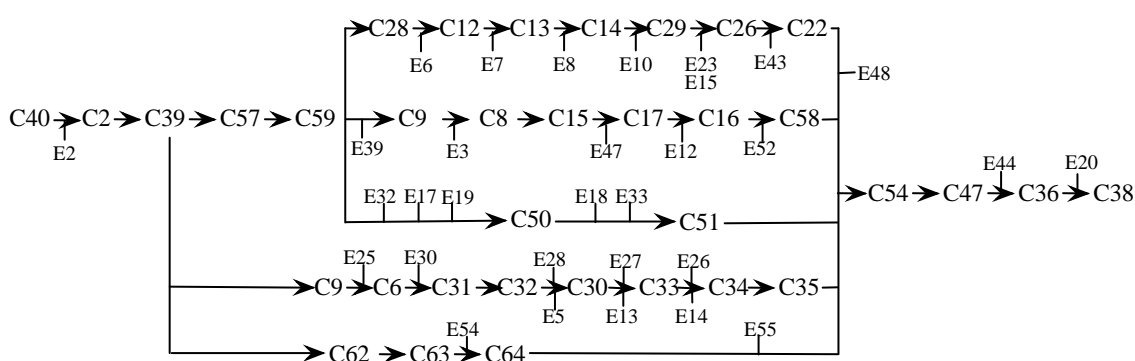


Figura 2. Grafo que recoge los caminos de aprendizaje de la tarea T1

### 3. Secuencias de capacidades en los caminos de aprendizaje

De Los grafos que recogen los caminos de aprendizaje de algunas tareas pueden ser muy complejos. Además, como veremos en las secciones siguientes, necesitaremos mirar conjuntamente varias tareas. Estos grafos contienen demasiada información y, en consecuencia, pueden resultar poco útiles. Sin embargo, una parte de la información recogida en los caminos de aprendizaje se puede expresar de un modo más sencillo. En efecto, cuando miramos globalmente varios caminos de aprendizaje distintos, bien asociados a una misma tarea o a un conjunto de tareas que pretenden contribuir a un mismo objetivo de aprendizaje, observamos trozos de esos caminos a los que se les puede atribuir una unidad de significado en el proceso de resolución de las tareas correspondientes. Los denominaremos secuencias de capacidades. Una secuencia de capacidades hace referencia a un procedimiento concreto dentro del proceso de resolución de una tarea que es posible distinguir y caracterizar. Asimismo, puede tener asociados ciertos errores propios del procedimiento a la que se refiere.

Puesto que los requisitos conductuales específicos a los que el desempeño del estudiante debe ajustarse suelen denominarse criterios de logro, la ejecución correcta de una secuencia de capacidades implica un logro. Se establece así, de manera natural, una correspondencia entre las secuencias de capacidades y los criterios de logro. Más adelante retomaremos esta idea.

Al expresar el conjunto de los caminos de aprendizaje de una tarea mediante secuencias de capacidades y errores, obtenemos el grafo de secuencias de capacidades de la tarea. Este grafo resulta muy útil a la práctica del profesor. Ejemplificamos a continuación esta idea con la tarea T1 que presentamos arriba.

### Ejemplo

En los caminos de aprendizaje de la tarea T1 que se muestran en la figura 2 podemos identificar varias secuencias de capacidades. La secuencia de capacidades C40-27 corresponde a la comprensión del enunciado por parte de los estudiantes; concretamente, se espera que, cuando los estudiantes lean la formulación de T1, reconozcan que la noción de permutación les ayuda a resolverlo y que identifiquen los datos del problema que se usarán para realizar el cálculo de permutaciones. Es posible que, en ese momento, los estudiantes incurran en el error E2 de tomar elementos repetidos para realizar el cálculo de permutaciones. La secuencia de capacidades formada, en este caso, por una sola capacidad —C39— permite identificar cuáles son los sistemas de representación útiles al cálculo de permutaciones en función de los datos que aporta la tarea. En ese momento, se produce una primera decisión sobre el proceso a seguir, separando el conteo directo de otros métodos indirectos. Si se elige el conteo directo, hay una segunda decisión sobre el sistema de representación a utilizar; así, las secuencias de capacidades C28-12-13-14-29-26-22, C9-8-15-17-16-58 y C50-51 representan los procedimientos concretos asociados a la utilización de un diagrama de árbol, una tabla y una lista, respectivamente. Cada una de ellas prevé la aparición de errores ligados al correspondiente sistema de representación. Por ejemplo, si se emplea un diagrama de árbol, se prevé que los estudiantes construyan un árbol con igual número de ramificaciones en cada nivel (E6). Si se elige el conteo indirecto, hay dos métodos, representados por las secuencias de capacidades C9-6-31-32-30-33-34-35 y C62-63-64, que corresponden al cálculo mediante la fórmula o al empleo del principio multiplicativo. Nuevamente se prevén errores asociados a estos procedimientos; por ejemplo, ante el empleo de una fórmula es posible que los estudiantes sustituyan valores que no corresponden a los parámetros de la fórmula (E28). Finalmente, la secuencia de capacidades C54-47-36-38 corresponde a la conclusión de la tarea: se expresa la solución, se verifica, se interpreta y se justifica. Estas secuencias de capacidades nos permiten expresar los caminos de aprendizaje de T1 de una forma más sencilla: la figura 3 muestra el grafo de secuencias de capacidades de esta tarea

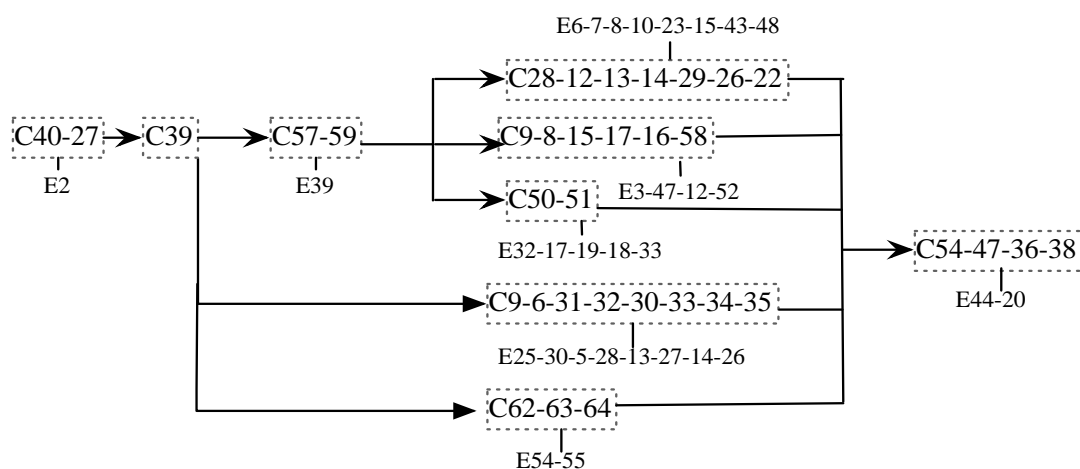


Figura 3. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea T1



La forma como un grupo de escolares aborda una tarea depende de sus conocimientos previos. Algunos escolares avanzados pueden activar, como un solo procedimiento, una sucesión de capacidades que otros escolares, menos preparados, deben activar por separado. Por consiguiente, el criterio para determinar cuándo una sucesión de capacidades es una secuencia de capacidades depende de la preparación de los escolares con los que el profesor está trabajando. El profesor decide, en función de dicha preparación, cuándo un grupo de capacidades tiene entidad propia para ser considerado como procedimiento aislado dentro de un proceso complejo de resolución de problemas y, por tanto, cuándo es una secuencia de capacidades. No obstante, es frecuente que el grupo de capacidades que aparecen entre dos bifurcaciones consecutivas del grafo de caminos de aprendizaje de una tarea tengan una unidad de significado y, por tanto, representen una secuencia de capacidades. Este es el caso para todas las secuencias de capacidades de la figura 3.

En algunas ocasiones, cuando miramos un conjunto de caminos de aprendizaje, vemos secuencias de capacidades que no son exactamente iguales sino similares: posiblemente varían en una capacidad o en algún error, o tienen alguno de estos elementos colocados en un orden distinto. En estos casos, y siempre que las secuencias de capacidades mantengan una unidad de significado desde el punto de vista de la resolución de la tarea correspondiente, las consideramos equivalentes. Ejemplificaremos esta idea más adelante.

#### 4. Caracterización de los objetivos de aprendizaje

Un objetivo de aprendizaje expresa expectativas que involucran conexiones entre los conceptos y procedimientos del tema matemático, los sistemas de representación en que se representa y los fenómenos que organiza. Por ejemplo, en el tema de permutaciones sin repetición, tenemos los objetivos siguientes.

- O1. Identificar en un conjunto de arreglos aquellos que corresponden a permutaciones sin repetición.
- O2. Construir para un conjunto dado todas las posibles permutaciones sin repetición.
- O3. Establecerla cantidad de permutaciones sin repetición posibles en un conjunto dado.
- O4. Resolver problemas que implican permutaciones sin repetición.

Vemos que los objetivos se enuncian mediante frases sintéticas. Es necesario aportar información adicional sobre el alcance de esas frases y esa información ha de ser útil a los efectos de comunicar de qué modo se pretende que el estudiante alcance los objetivos. A continuación, proponemos un procedimiento para caracterizar los objetivos de esta forma.

A cada objetivo de un tema, el profesor puede asociar un conjunto de tareas prototípicas, es decir, tareas tales que si un estudiante las resuelve, entonces él considera que ha logrado el objetivo. Al reunir los grafos de secuencias de capacidades de estas tareas, se obtiene lo que denominamos el grafo del objetivo de aprendizaje.

##### Ejemplo

Hemos asociado el objetivo O3 anterior a dos tareas prototípicas. Una de ellas es la tarea T1 que vimos antes. La otra es la tarea T2 siguiente.

## T2 Podios

En una competencia atlética participan 5 personas. David dice que se pueden obtener 12 podios diferentes. Camilo afirma que podrían ser 15. Sin embargo, Carlos encontró 60.

¿Quién tiene la razón? Justifique su respuesta.

El grafo de secuencias de capacidades de esta tarea aparece en la figura 4.

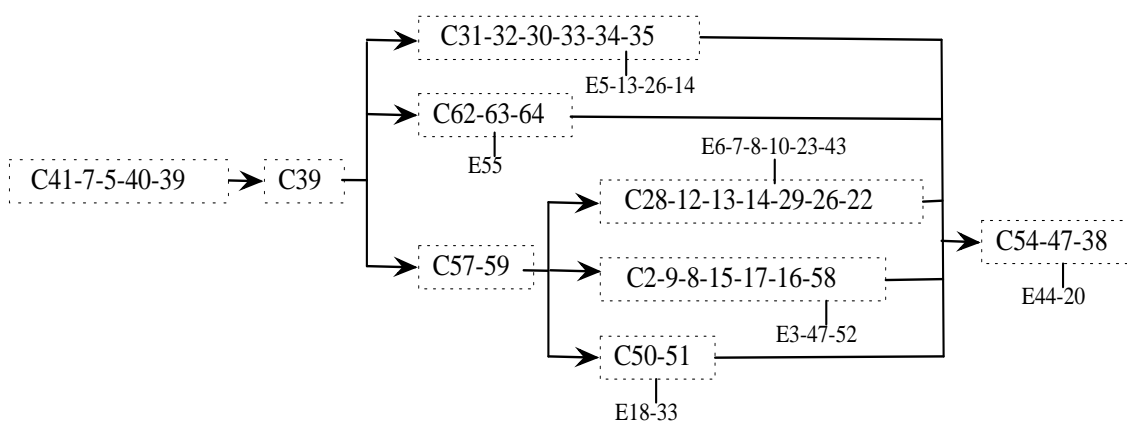


Figura 4. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea T2

Se aprecia que los grafos correspondientes a las tareas T1 y T2 (figuras 3 y 4) comparten varias secuencias de capacidades (iguales o equivalentes). Teniendo en cuenta estas secuencias de capacidades, podemos combinar los grafos de secuencias de capacidades de las dos tareas, formando así el grafo del objetivo de aprendizaje (figura 5).

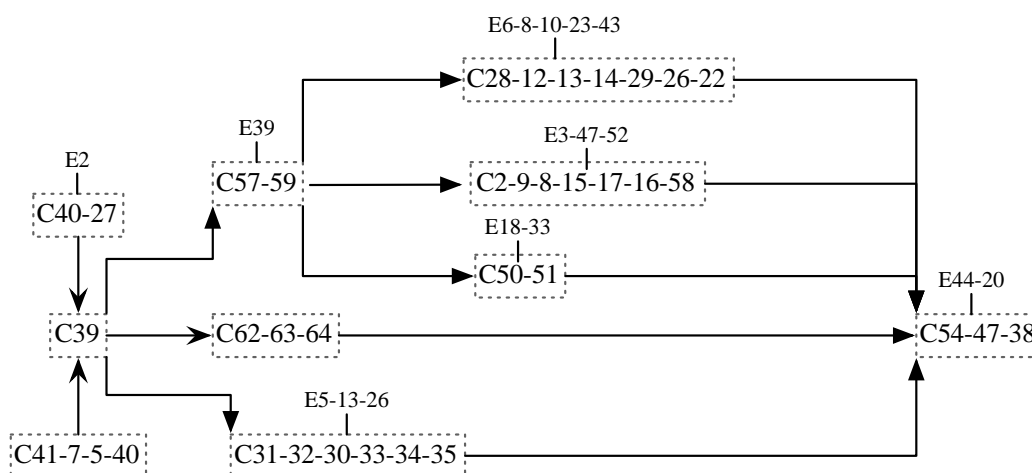


Figura 5. Grafo del objetivo de aprendizaje O3

En el grafo de la figura 5, las dos primeras secuencias de capacidades, C40-27y C41-7-5-40, corresponden a identificar en el enunciado que el problema se resolverá mediante permutaciones y a extraer los datos necesarios para realizar el cálculo. Estas secuencias de capacidades corresponden al inicio de todas las tareas. En ese momento, se prevé que los estudiantes puedan incurrir en el error de tomar elementos repetidos para realizar el cálculo de permutaciones (E2). Aparecen seguidas de C39 en todas las tareas, punto en el que los estudiantes deciden si utilizarán un método de cálculo directo o indirecto. Si el cálculo es



directo, la secuencia de capacidades C57-59 representa la decisión sobre el sistema de representación en el que se hace conteo y los procedimientos consiguientes, como hemos detallado en el ejemplo de la tarea T1. Si el conteo es indirecto, se prevén dos métodos, representados por las secuencias de capacidades C62-63-64 y C31-32-30-33-34-35, que corresponden al empleo del principio multiplicativo y al cálculo mediante la fórmula, respectivamente. En ese momento se prevé que los estudiantes puedan incurrir en errores relacionados con un mal uso de la fórmula, como confundir parámetros, calcular mal el factorial, o interpretar mal un número combinatorio (E5-13-26). Finalmente, todos los caminos comparten la secuencia de capacidades C54-C47-C39, que corresponde a exponer la cantidad pedida o a verificarla sobre los sistemas de representación (si se usaron). Es previsible que en esta parte los estudiantes puedan incurrir en errores relacionados con un conteo equivocado y, en consecuencia, con la obtención de una solución incoherente (E44-20).

El grafo de aprendizaje de un objetivo proporciona una representación del objetivo en términos de los procedimientos y de los errores que se prevén en el tema. A partir del grafo, se obtiene una valiosa información sobre el modo en que el objetivo se pretende desarrollar, es posible dar significado a las conexiones entre secuencias de capacidades y es posible prever errores en el desarrollo del objetivo. Observamos que el objetivo implica: (a) ser capaz de reconocer que una tarea se resuelve mediante permutaciones y de identificar los datos que se emplearán en el cálculo; (b) ser capaz de tomar una decisión sobre los métodos de cálculo adecuados; (c) reconocer situaciones en las que el problema se puede resolver por enumeración directa de los arreglos en algún sistema de representación; (d) saber aplicar la fórmula, el principio multiplicativo o enumerar los arreglos y contarlos dentro de un sistema de representación; y (e) expresar la solución y verificar el resultado de acuerdo con la pregunta inicial. Desde el punto de vista de los errores, se prevé (a) que los estudiantes expresen permutaciones con elementos repetidos, (b) que hagan un cálculo erróneo del factorial, (c) que confundan parámetros en la fórmula, (d) que utilicen una tabla de doble entrada cuando no es conveniente, (e) que consideren que los árboles tienen igual número de ramificaciones en todas las ramas, (f) que cuenten elementos repetidos y (g) que obtengan una solución incoherente como consecuencia de un conteo equivocado.

Queremos notar que esta caracterización del objetivo la realiza cada profesor y depende esencialmente de las tareas prototípicas que este asocie al objetivo, de los caminos de aprendizaje que prevea y de la identificación de secuencias de capacidades y errores que realice. El ejemplo presentado está basado en la caracterización del objetivo O3 realizada por el grupo 5 de MAD2

## 5. Análisis y mejora de tareas

Una de las actividades clave del profesor en su proceso de enseñanza consiste en formular tareas que contribuyan a los objetivos de aprendizaje que se ha propuesto (Ainley y Margolinas, 2013; Gemad, 2013; Sullivan et al., 2010). La caracterización de un objetivo de aprendizaje en términos de su grafo de secuencias de capacidades le permite establecer en qué medida y de qué forma una tarea contribuye al logro de ese objetivo de aprendizaje. Para ello, él ha de comparar las secuencias de capacidades que prevé que se pueden activar con una tarea y los errores en los que los estudiantes pueden incurrir, con las secuencias de capacidades y los errores que caracterizan el objetivo de aprendizaje. Al hacer la comparación, él puede prever cuáles de las secuencias de capacidades que caracterizan el

objetivo de aprendizaje es posible que se activen con la tarea y cuáles no y qué errores se abordan. De esta manera, él puede determinar cómo la tarea contribuye al logro del objetivo de aprendizaje y a la superación de los errores. Con esta información, el profesor puede decidir reformular la tarea de cara a que ella contribuya a la superación de otros errores, consolide la activación de ciertas secuencias de capacidades o promueva la activación de otras; diseñar otras tareas con esos propósitos; y, finalmente, diseñar una secuencia de tareas que, en conjunto, induzca a los escolares a activar las secuencias de capacidades y abordar los errores que caracterizan el objetivo de aprendizaje.

A continuación, ejemplificaremos algunas de estas ideas con el objetivo de aprendizaje 3 del tema de permutaciones sin repetición, “Establecer la cantidad de permutaciones sin repetición posibles en un conjunto dado”, que caracterizamos en el apartado anterior. Utilizaremos la información que proporciona el grafo de ese objetivo de aprendizaje para analizar y reformular una tarea. Nuestro propósito es mostrar cómo el análisis de la tarea en relación con ese grafo nos permite modificarla con el propósito de generar nuevas versiones que contribuyan al objetivo de aprendizaje. Partiremos, por lo tanto, de una tarea básica que aborda solamente un aspecto del objetivo de aprendizaje y la modificaremos en tres pasos para llegar a un conjunto de tareas relacionadas que pretende contribuir a varios aspectos del objetivo de aprendizaje. La tarea básica es la siguiente.

Utilice la fórmula para establecer el número de permutaciones de 10 elementos en un conjunto de 24 elementos.

Prevedemos un único camino de aprendizaje para esta tarea compuesto por la secuencia de capacidades C30-32-33-35, que implica conocer la fórmula, sustituir los valores en ella y calcular el resultado. Esta es una de las secuencias de capacidades que aparece en el grafo del objetivo de aprendizaje de la figura 5. El grafo nos da pistas sobre cómo podemos modificar la tarea, por ejemplo, para que involucre una situación en un contexto no matemático, implicando algunas de las secuencias de capacidades del comienzo y final del grafo. De esta forma, podemos formular una tarea un poco más compleja, con los mismos datos pero involucrando un contexto no matemático, como la siguiente.

Utiliza la fórmula para establecer cuántas combinaciones ordenadas de 10 colores diferentes se pueden hacer con una paleta que tiene 24 colores.

Esta tarea implica el grafo de secuencias de capacidades que se muestra en la figura 6.

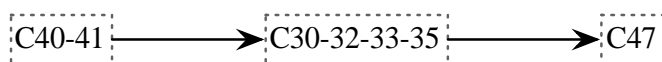


Figura 6. Grafo de secuencias de capacidades de una tarea

Observamos que esta tarea puede activar tres secuencias de capacidades. Su diferencia con la primera consiste en que el escolar debe identificar los datos dados y pedidos e interpretar el resultado de aplicar la fórmula. Evidentemente, el profesor sabe de antemano que proponer una tarea en un contexto no matemático conlleva una demanda cognitiva mayor. No obstante, el grafo proporciona al profesor información adicional que le permite concebir tareas orientadas a promover adecuada y eficientemente el logro del objetivo de aprendizaje. Por ejemplo, el grafo le permite al profesor establecer qué secuencias de capacidades concretas se pueden activar, en qué orden y dirección, cuáles aún

no se han activado y cómo se pueden intercalar unas secuencias con otras. Continuamos ejemplificando estas ideas con el análisis y modificación de la tarea anterior.

Al comparar este grafo de secuencias de capacidades de la tarea con el grafo del objetivo de aprendizaje, observamos que el grafo del objetivo de aprendizaje incluye otras secuencias de capacidades. Por consiguiente, podemos mejorar la tarea, o complementarla con otras tareas, con el propósito de incorporar una mayor porción del grafo del objetivo de aprendizaje. Si decidimos mejorarla, podemos, por ejemplo, constatar que el grafo del objetivo de aprendizaje destaca la importancia de inducir a los estudiantes a usar los sistemas de representación (ej., el diagrama de árbol) para enumerar las permutaciones. Esta idea nos permite formular la siguiente tarea.

Haz un diagrama de árbol en el que se representen todas las banderas de tres bandas con colores diferentes que se pueden hacer con una paleta que tiene 6 colores. ¿Cuántas banderas diferentes se pueden hacer? Verifica el resultado usando la fórmula.

En la figura 7 presentamos el grafo de secuencias de capacidades de esta tarea.

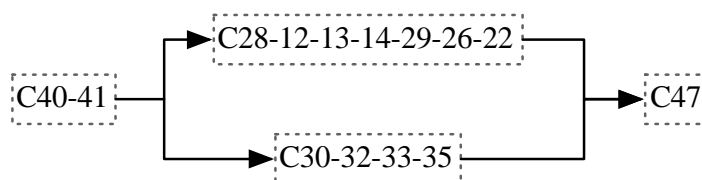


Figura 7. Grafo de secuencias de capacidades de la nueva tarea

El grafo de secuencias de capacidades indica que la nueva tarea podría activar una nueva secuencia de capacidades relacionada con los sistemas de representación. No obstante, el grafo del objetivo de aprendizaje nos indica que lograr el objetivo de aprendizaje implica otras secuencias de capacidades: saber enumerar permutaciones en otros sistemas de representación y establecer su cantidad por medio del principio multiplicativo. Serán necesarias varias tareas que involucren estos conceptos y procedimientos y que induzcan a los escolares a ponerlos en juego y relacionarlos. Este es el caso del conjunto de tareas relacionadas que presentamos a continuación y que involucra una sucesión de requerimientos para el escolar.

Para abrir una cuenta de correo electrónico en el servicio conteo.com, un usuario debe escoger una contraseña de tres caracteres diferentes con las cuatro primeras letras del alfabeto en minúscula (a, b, c y d).

El dueño de conteo.com quiere saber cuántas contraseñas diferentes puede haber y entender por qué. Teniendo en cuenta que al dueño de conteo.com no le gustan las fórmulas, escribe un texto, que use un diagrama de árbol o un listado, en el que le muestres al dueño de conteo.com cuántas contraseñas puede haber y cómo se obtiene ese resultado.

Los técnicos de conteo.com están pensando en permitir que se usen las 27 letras de alfabeto en minúsculas para las contraseñas de tres caracteres diferentes. Ellos quieren saber cuántas contraseñas pueden haber y por qué. Escribe un texto en el que muestres cómo se puede hallar el número de contraseñas teniendo en cuenta el número de letras que se puede usar para cada uno de los tres caracteres.

El jefe del departamento técnico de conteo.com quiere prever el crecimiento de su servicio. Él quiere saber cuántas contraseñas de 10 caracteres diferentes pueden haber si se permiten las letras del alfabeto en minúsculas y mayúsculas. ¿Cuántas son?

La figura 8 muestra los caminos de aprendizaje de esta tarea.

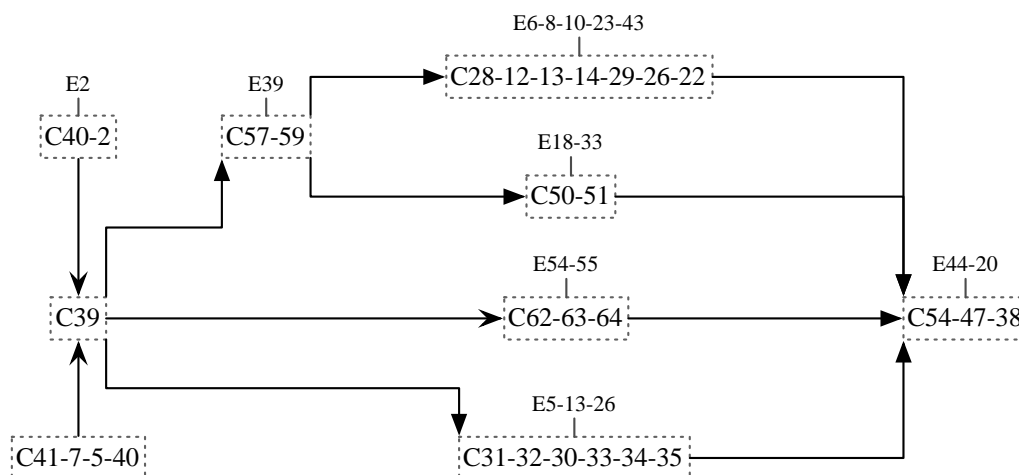


Figura 8. Grafo de caminos de aprendizaje del conjunto de tareas

En la figura 8 se aprecia que este conjunto de tareas pretende inducir a los escolares a activar un mayor número de las secuencias de capacidades implicadas en el objetivo. Los extremos izquierdos y derecho del grafo indican que la tarea induce a los escolares a establecer los datos implicados y a interpretar los resultados de los cálculos. La parte superior del grafo muestra que la tarea puede inducir a los escolares a utilizar el diagrama de árbol o un listado para enumerar las permutaciones sin repetición y establecer su cantidad (numeral 1). El numeral 2 de la tarea induce a los escolares a utilizar el principio multiplicativo para hallar el número de permutaciones sin repetición (parte intermedia del grafo). Finalmente, la parte inferior del grafo indica que el numeral 3 de la tarea induce a los escolares a utilizar la fórmula. En el grafo de la figura 8 hemos incluido los errores en los que los escolares pueden incurrir al activar las diferentes secuencias de capacidades.

## 6. Evaluación y actuación de los estudiantes

Las nociones de grafo de un objetivo y camino de aprendizaje también son útiles para llevar a cabo una evaluación focalizada en el aprendizaje de los estudiantes. Según este enfoque, la evaluación se integra con la instrucción y se concibe como un permanente proceso reflexivo en el que la información obtenida a partir de las actuaciones de los estudiantes redunda en las actuaciones del profesor, con el propósito de contribuir a la consecución de los objetivos de aprendizaje (Harlen y Winter, 2004). Además, los estudiantes han de tomar parte activa en este proceso. Para ello, necesitan tener una guía de lo que se espera que aprendan, de cómo lo están haciendo, de cómo pueden avanzar y de cómo pueden superar los obstáculos que se lo impiden. Dicha guía debe basarse en evidencias y en criterios que permitan interpretarlas. Ambos elementos necesitan ser explícitos y compartidos para poder realizar juicios de valor que tengan sentido para los agentes implicados.

En lo que sigue, mostramos el potencial que tiene la noción de grafo de un objetivo de aprendizaje a la hora de realizar este tipo de evaluación. Concretamente, veremos de qué manera el profesor puede usarlo para: (a) compartir las expectativas de aprendizaje con los estudiantes; (b) obtener información sobre el modo en que los estudiantes progresan en la resolución de las tareas e interpretarla; (c) utilizar dicha información para mejorar su enseñanza; y (d) valorar el progreso de los estudiantes en la consecución de los objetivos de aprendizaje.

#### *a) Compartir expectativas de aprendizaje con los estudiantes*

Tal como hemos señalado, para involucrar a los estudiantes en el proceso de evaluación, el profesor necesita encontrar una manera de compartir con ellos los objetivos de aprendizaje y los criterios para valorar su logro. Para un objetivo determinado, consideramos que las secuencias de capacidades que conforman su grafo pueden interpretarse en términos de criterios de logro de dicho objetivo. Esto es así porque que dichas secuencias han sido definidas como procedimientos concretos que los estudiantes han de dominar para resolver las tareas prototípicas que caracterizan el objetivo de aprendizaje y, por tanto, para alcanzar dicho objetivo. Se constituyen así en requisitos conductuales cuyo cumplimiento implica logros parciales en el logro del objetivo.

Partiendo de esta idea, es posible construir, a partir del grafo de secuencias de capacidades de un objetivo, un nuevo grafo con la misma estructura, en el que cada secuencia de capacidades representa un criterio de logro redactado en un lenguaje adaptado a los estudiantes y comprensible para ellos. Para elaborar el nuevo grafo, el profesor puede utilizar la primera persona, sustituir expresiones demasiado técnicas para el nivel de sus estudiantes, explicitar algunos supuestos, etc. Ejemplificamos las ideas anteriores haciendo uso del objetivo 3 del tema de permutaciones sin repetición, que hemos venido trabajando en apartados anteriores (figura 9). El grafo de criterios de logro del objetivo permite al profesor compartir con sus estudiantes una visión del proceso de consecución del objetivo como una progresión estructurada en la que se aprecian el orden y las relaciones entre los criterios de logro.

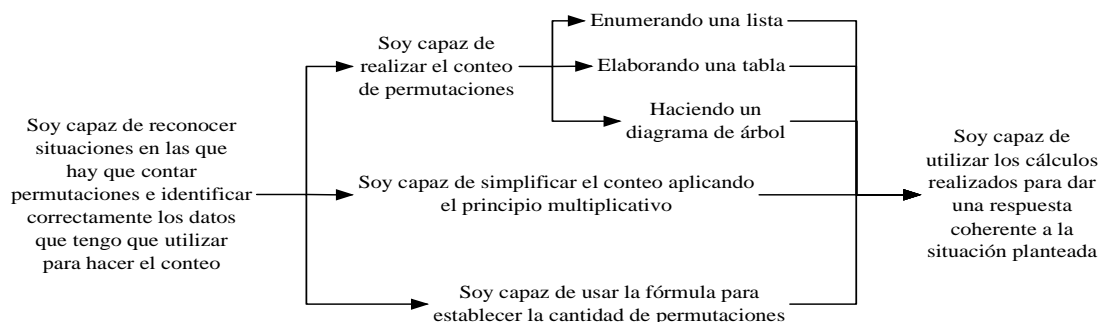


Figura 9. Grafo de criterios de logro del objetivo 3 para compartir con los estudiantes

Por otra parte, el grafo de criterios de logro puede particularizarse a cada tarea diseñada para contribuir al logro del objetivo. En el apartado anterior, mostramos que es posible establecer a priori la contribución de una tarea a un objetivo de aprendizaje, al identificar aquellas secuencias de capacidades pertenecientes al grafo del objetivo que pueden ser activadas cuando se realiza dicha tarea. Así, dada una tarea, es posible compartir su meta con los estudiantes, señalando en el grafo a qué criterios de logro apunta la tarea en

cuestión. Ejemplificamos esta idea en la figura 10, con la tercera tarea del apartado anterior, en la que hemos resaltado los criterios de logro a los que la tarea pretende contribuir.

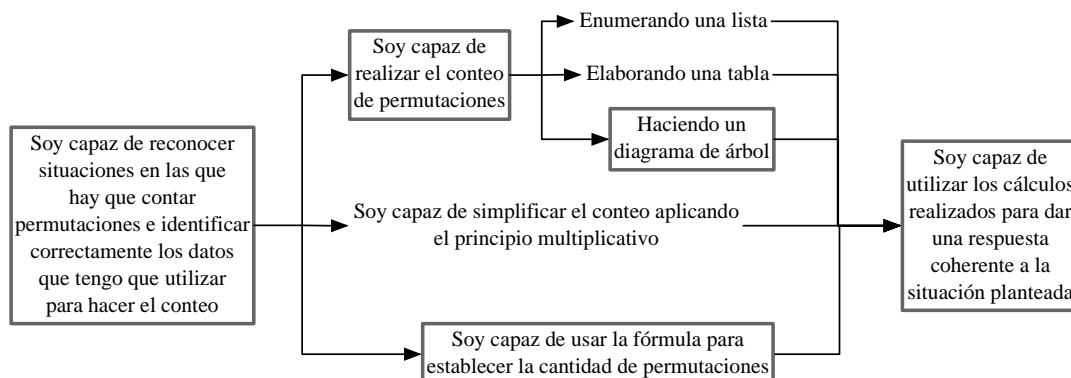


Figura 10. Criterios de logro a los que apunta la tercera tarea

Mediante este procedimiento, profesor y estudiantes disponen de un esquema común que les permitirá valorar, como mostramos en el siguiente apartado, cómo el aprendizaje conseguido mediante la realización de una tarea determinada está contribuyendo al logro del objetivo.

#### ***b) Información sobre la actuación de los escolares ante una tarea***

Al implementar una tarea en el aula, el profesor puede recabar información sobre los caminos de aprendizaje que siguen los estudiantes al realizarla, interpretar dicha información y utilizarla para ayudarles a progresar. A continuación, presentaremos algunos procedimientos para la recogida de información y veremos cómo el grafo de un objetivo de aprendizaje le sirve al profesor para interpretar los datos que dichos procedimientos le proporcionan.

Durante la implementación de una tarea en el aula, el profesor dispone de varias fuentes de evidencias para identificar los caminos de aprendizaje que sus estudiantes recorren al llevarla a cabo: la observación directa de sus actuaciones durante la realización; las discusiones que puede promover en pequeños grupos y/o en gran grupo; y los registros escritos sobre el proceso de resolución de la tarea que los estudiantes pueden proporcionarle, en la medida en que se propicien tales registros como requisitos de la tarea.

La comparación de la actuación real de los estudiantes al realizar la tarea con este grafo le permite al profesor identificarlas secuencias de capacidades y las capacidades concretas que sus estudiantes han activado o dejado de activar, así como los errores en los que han incurrido. En efecto, con las evidencias recogidas a partir de la implementación de una tarea, el profesor puede constatar que algunos estudiantes activan sin problema las secuencias de capacidades previstas. Lo más normal es que haya estudiantes que activen correctamente algunas de las secuencias de capacidades y otras no, bien porque incurran en errores, o bien porque no activen capacidades necesarias dentro de las secuencias en cuestión. Esto puede suceder en distintas etapas de la progresión hacia el objetivo. También podría ocurrir que hubiera estudiantes que sigan caminos no previstos. Así, por ejemplo, en la tercera tarea antes mencionada, el profesor podría observar que algunos estudiantes recorren el camino tal como había previsto (figura 7); que hay estudiantes que no activan correctamente la segunda secuencia de capacidades porque no son capaces de verificar la cantidad de permutaciones requeridas a partir del diagrama de árbol (C22); que hay estudiantes que fallan en activar la tercera secuencia de capacidades porque incurren en el

error de confundir entre sí los parámetros de la fórmula (E5); o que inducen el principio multiplicativo a partir del diagrama de árbol en su intento de averiguar de forma eficiente el número de arreglos (es decir, activan la secuencia de capacidades C62-63-64, de forma imprevista). En el siguiente apartado, expondremos cómo el profesor puede hacer uso de esta información para mejorar su proceso de enseñanza.

Además, el profesor puede obtener una información valiosa a través de la autoevaluación de los estudiantes sobre sus logros y dificultades en la tarea en cuestión. Para llevar a cabo esta autoevaluación, proponemos un sencillo sistema de marcas con colores, que denominamos semáforos, con el que los estudiantes pueden indicar, en cada criterio de logro al que apunta una tarea, el grado en que perciben que lo han conseguido. El verde significa que el estudiante cree cumplir el criterio, el amarillo que tiene dudas al respecto y el rojo que no ha podido lograrlo. La figura 11 muestra la autoevaluación de un estudiante hipotético para la tercera tarea, encuadrada en el objetivo 3, a los que se refiere el grafo de la figura 7.

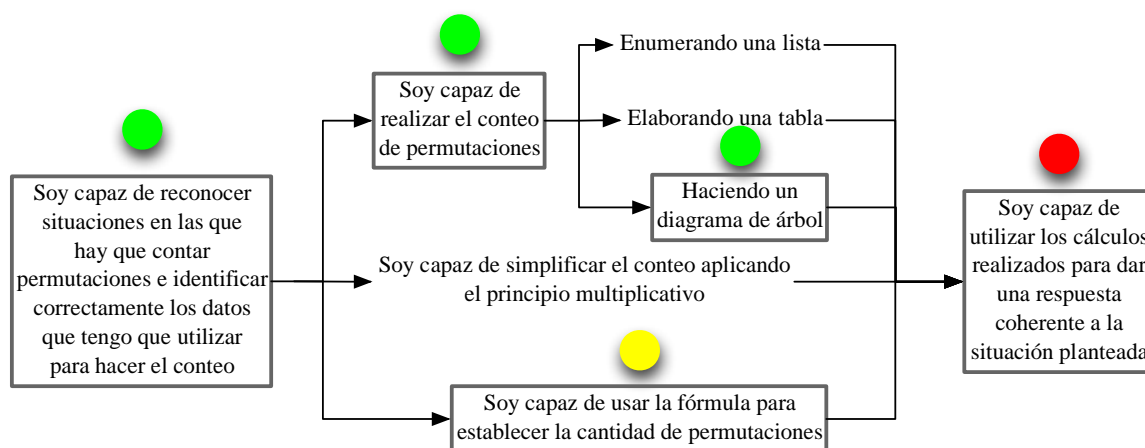


Figura 11. Grafo de criterios de logro de la tarea 2 con semáforos

Mediante este sistema, al finalizar una tarea, el profesor puede recabar, de forma rápida y sencilla, la percepción que los estudiantes tienen de sus avances y sus dificultades en el logro del objetivo con la tarea en cuestión. Nótese que este procedimiento proporciona una información subjetiva que el profesor puede contrastar con las otras fuentes de información indicadas.

### c) Implicaciones para la enseñanza

Durante la implementación de la secuencia de tareas diseñadas para lograr un objetivo de aprendizaje, el profesor tiene que tomar decisiones sobre su proceso de enseñanza a dos niveles: al nivel de la clase en su conjunto y al nivel de los estudiantes particulares. Por lo que respecta a la clase en su conjunto, dependiendo del número de estudiantes que consiguió activar todas las secuencias de capacidades previstas para una tarea, u otras no previstas, del número de estudiantes que logró avances parciales a distintos niveles del grafo del objetivo y de las razones para ello, el profesor puede valorar la contribución real de la tarea al logro del objetivo de aprendizaje. A partir de ahí, puede tomar decisiones fundamentadas sobre cómo actuar. Por ejemplo, puede optar por dar ayudas específicas a aquellos estudiantes que incurrieron en errores y continuar implementando las siguientes tareas tal como las tenía diseñadas. O bien, puede optar por realizar modificaciones en su planificación, incorporando tareas que incidan en ciertas



secuencias de capacidades, cambiando enunciados para inducir a activar una capacidad específica o para provocar un conflicto cognitivo respecto a un error, introduciendo tareas que aprovechen las secuencias activadas de forma imprevista, etc. De este modo, podría optimizar las posibilidades de que la clase logre el objetivo de aprendizaje propuesto.

Por lo que respecta a los estudiantes particulares, en una evaluación enfocada hacia el aprendizaje, la realimentación juega un papel esencial. Para llevarla a cabo, el profesor dispone de un grafo compartido con el estudiante, en el que se indican aquellos criterios de logro hacia los que apunta una tarea determinada. El estudiante proporciona al profesor su percepción del grado en que ha satisfecho dichos criterios, a través del sistema de semáforos. El profesor, a su vez, a través del análisis de su trabajo escrito y de las observaciones que haya podido realizar de su actuación, dispone de evidencias con las que poder matizar con dicho estudiante aquellos criterios de logro que pudo satisfacer, las capacidades que aún deberá desarrollar para lograr otros y los errores que pueden estar impidiéndolo en un momento determinado. A partir de ahí, completará la realimentación con propuestas concretas para que el estudiante avance con respecto al grafo de criterios de logro del objetivo, desde el punto en el que se encuentra.

#### *d) Valoración del progreso de los estudiantes*

El grafo del objetivo también puede servirle al profesor para determinar el nivel de logro que los estudiantes han alcanzado en relación con la consecución de un objetivo. Para ello, es necesario disponer de una tarea, o conjunto de tareas, que abarquen los criterios de logro de dicho objetivo. El último grupo de tareas del apartado anterior, que pretende activar prácticamente todas las secuencias de aprendizaje del grafo del objetivo 3 (a excepción del conteo mediante una tabla), puede servir para este propósito. Para su corrección, el profesor puede elaborar una rúbrica que refleje la medida en que un estudiante ha avanzado en el logro de los criterios señalados a lo largo del grafo del objetivo. La tabla 1 ejemplifica estas ideas para el objetivo 3 que hemos venido considerando y el grupo de tareas antes mencionado.

*Tabla 1*

*Niveles de logro e indicadores para el objetivo 3*

Nivel de logro	Indicadores
Alto	El estudiante activa todas las secuencias previstas en el camino de aprendizaje del objetivo, sin errores.
	El estudiante incurre en errores menores (ej. fallos en las operaciones aritméticas) que no le impiden llegar hasta el final).
Básico	El estudiante es capaz de reconocer la situación planteada en la tarea 3 como adecuada para aplicar una fórmula (C31), pero incurre en errores en su aplicación (E5, E6 o E26)
	El estudiante no reconoce la idoneidad de aplicar la fórmula para resolver la tarea 3 y la resuelve aplicando el principio multiplicativo.
Bajo	El estudiante establece el principio multiplicativo pero incurre en el error de repetir elementos (E55).
	El estudiante no llega a establecer el principio multiplicativo porque incurre en el error de sumar en lugar de multiplicar (E54). El estudiante incurre en errores correspondientes al establecimiento de las permutaciones en forma de tabla o de diagrama de árbol que le impiden avanzar en el camino de aprendizaje.

Para caracterizar los niveles de logro dentro de la rúbrica, el profesor ha recurrido, una vez más, a la información que le proporciona el grafo del objetivo. Así, cada nivel de logro está caracterizado por las secuencias de capacidades activadas y los errores en los que el estudiante ha podido incurrir. Es importante determinar qué secuencias de capacidades considera necesario que el estudiante haya activado para alcanzar un nivel básico en el logro del objetivo. Por otra parte, dentro de cada nivel establecido, la importancia de los errores cometidos podría utilizarse para asignar una calificación numérica mayor o menor, dentro de un rango de puntuación correspondiente al nivel.

## 7. Discusión

Inspirados en la propuesta de Simon sobre trayectoria hipotética de aprendizaje, en este artículo hemos propuesto, partiendo de la idea de camino de aprendizaje de una tarea, unas nociones y procedimientos que permiten caracterizar un objetivo de aprendizaje en términos de secuencias de capacidades y errores, analizar la contribución de una tarea y una secuencia de tareas al logro de un objetivo de aprendizaje y recoger y analizar información proveniente de la actuación de los escolares con el propósito de mejorar el aprendizaje y la enseñanza. Para ello, hemos mostrado cómo se construye el grafo de un objetivo de aprendizaje a partir del grafo de secuencias de capacidades de sus tareas prototípicas. El grafo del objetivo detalla las expectativas de aprendizaje del profesor en términos de secuencias de capacidades y de la estructura y los vínculos entre esas secuencias de capacidades y los errores. De esta forma, el profesor puede caracterizar sistemáticamente un objetivo de aprendizaje. Él puede establecer la contribución de una tarea al objetivo de aprendizaje al distinguir aquellas secuencias de capacidades que aparecen en el grafo del objetivo de aprendizaje y que pueden ser activadas por la tarea. Con esta información, el profesor puede tomar decisiones sobre la secuencia de tareas, al reformular algunas, proponer nuevas y decidir el orden en que se las propondrá a los escolares. Finalmente, con base en el grafo del objetivo de aprendizaje, él puede construir el grafo de criterios de logro de ese objetivo de aprendizaje, con el que él puede compartir sus expectativas de aprendizaje con sus estudiantes y ellos pueden informarle sobre sus percepciones de su progreso en el logro del objetivo de aprendizaje. El profesor también puede establecer ese progreso al analizar las actuaciones y producciones con ayuda del grafo del objetivo de aprendizaje en el que él puede constatar qué secuencias de capacidades han activado y en qué errores han incurrido los escolares.

El tema de las permutaciones sin repetición nos ha servido de ejemplo para mostrar el uso que se puede dar a las ideas anteriores en la formación de profesores de matemáticas. Este uso no se circunscribe a un tema específico como este, dado que cualquier tema de las matemáticas escolares se puede organizar en términos de conceptos elementales y procedimientos rutinarios que permiten identificar las capacidades con las que se pueden describir los procesos de resolución de las tareas. Nosotros hemos comprobado que estas ideas son útiles y tienen sentido para los profesores que participan en un programa de formación en el que somos formadores y en el que los profesores trabajan en grupo de modo colaborativo en diversos temas de las matemáticas escolares<sup>3</sup>. Estas herramientas les

---

<sup>3</sup>Los trabajos finales de los grupos de profesores en formación de la primera cohorte de ese programa se pueden descargar en <http://tinyurl.com/9dpvkqp>. En este enlace, <http://tinyurl.com/ocxw3cp>, se pueden ver los vídeos de las presentaciones hechas por los grupos de profesores en formación de la segunda cohorte del programa de formación para las actividades 5.2 y 5.3. Estos vídeos ejemplifican el trabajo realizado por ellos con las ideas propuestas en el artículo.

permiten indagar, de manera sistemática, sobre su propia práctica y sobre sus implicaciones en el aprendizaje de sus estudiantes.

Estas nociones y procedimientos buscan ayudar al profesor en el manejo de algunos aspectos de la complejidad del aula. No obstante, la realidad del aula es más rica que la simplificación estructurada que se insinúa con los grafos de secuencias de capacidades y de criterios de logro. Por un lado, usualmente los estudiantes actúan de maneras que el profesor no ha podido prever. Por ejemplo, pueden incurrir en errores relevantes no previstos o pueden abordar la tarea con estrategias que no siguen necesariamente la estructura ordenada del grafo del objetivo de aprendizaje. Cuando esto sucede, el profesor puede modificar sus previsiones y el uso que hace de ellas, tanto sobre la marcha, si le es posible, como para futuras implementaciones de su diseño curricular; es decir, él puede (a) modificar el grafo del objetivo de aprendizaje y usar el nuevo grafo de cara al diseño y modificación de tareas y a la evaluación de la actuación de los estudiantes; y (b) modificar el grafo de criterios de logro y la evaluación de los estudiantes. Por otro lado, la intervención del profesor en clase (por ejemplo, al hacer preguntas, dar explicaciones o proporcionar ayudas con motivo de errores) también puede modificar la actuación de los escolares de formas que no puedan representarse o evaluarse con la información que él ha generado en sus grafos. En este caso, no es cuestión de que el profesor modifique sobre la marcha las herramientas que ha construido. Estas herramientas seguirán sirviéndole de referencia, pero él tendrá que adaptar su actuación (en la instrucción y la evaluación) a la realidad del aula. Las herramientas le servirán de guía básica para esas adaptaciones.

A lo largo del artículo nos hemos referido a un profesor en formación que conoce, con suficiente profundidad, las nociones propuestas y el contenido del tema de las matemáticas escolares al que se refiere el objetivo de aprendizaje, y tiene suficiente experiencia docente para formular sus previsiones sobre lo que puede suceder cuando los escolares aborden las tareas que se le proponen. También suponemos que ese profesor tiene suficiente tiempo para identificar tareas prototípicas; producir los grafos de secuencias de capacidades de esas tareas; construir el grafo del objetivo de aprendizaje; evaluar sus tareas de aprendizaje con base en ese grafo y modificarlas y complementarlas; producir el grafo de criterios de logro del objetivo de aprendizaje; recoger y analizar la información que surge del sistema de semáforos; analizar la actuación y la producción escrita de los estudiantes con base en el grafo del objetivo de aprendizaje; realimentar a los estudiantes a partir de ese análisis; y producir la rúbrica de niveles de logro de una tarea de evaluación.

Evidentemente, estos procedimientos no son directamente aplicables a la práctica diaria de un profesor. No obstante, si buscamos que, al finalizar su formación, el profesor se haga consciente de la complejidad que está implicada en la formulación sintética usual de los objetivos de aprendizaje; que reconozca que esa complejidad implica diferentes formas de actuación por parte de los estudiantes cuando abordan las tareas; que es importante reflexionar sobre cómo los objetivos de aprendizaje se relacionan con los procesos de pensamiento de los escolares; que cada tarea de aprendizaje puede contribuir de diferentes maneras al logro del objetivo de aprendizaje y que es importante diseñar secuencias de tareas que contribuyan apropiadamente a ese objetivo de aprendizaje; que al caracterizar con más profundidad un objetivo de aprendizaje es posible establecer sistemáticamente criterios de logro de ese objetivo de aprendizaje; y que ese esfuerzo por caracterizar con mayor detalle el objetivo de aprendizaje le puede proporcionar formas de compartirlo con sus estudiantes, de establecer cómo sus estudiantes progresan en su logro y de apoyar y valorar su aprendizaje.

Hemos descrito nociones y procedimientos que utilizamos en programas de formación permanente de profesores. En estos programas, hemos constatado que los profesores en formación pueden usarlos en su trabajo de formación y aprecian la utilidad de estas nociones y procedimientos en sus clases. Por otra parte, las nociones y procedimientos propuestos pueden ser de utilidad para la investigación de la práctica docente (Suavita, 2012) y para la misma investigación en el aula del profesor, como lo hemos constatado en las indagaciones sistemáticas que, sobre su práctica, han realizado los profesores que participan en el programa de formación mencionado. Esperamos contrastar con investigaciones posteriores qué implicaciones tiene ese aprendizaje en la práctica diaria de estos profesores.

### Referencias bibliográficas

- Ainley, J. y Margolinas, C. (2013). *Accounting for student perspectives in task design*. En C. Margolinas, A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. B. Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, P. Sullivan, D. Thompson y Y. Yang (Eds.), *Proceedings of ICMI Study 22. Task Design in Mathematics Education* (pp. 151-152). Oxford, UK: ICMI.
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Clements, D. H., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. A. y Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(2), 127-166.
- Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G. y Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 345-352.
- Corcoran, T., Mosher, F. A. y Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science. Documento no publicado*. Philadelphia, PA: Centre for Continuous Instructional Improvements. Columbia University, New York: Teacher College Press.
- Daro, P., Corcoran, T. y Mosher, F. A. (2011). *Learning trajectories in mathematics: a foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction. Documento no publicado*. Philadelphia, PA: Centre for Continuous Instructional Improvements. Columbia University, New York: Teacher College Press.
- Gemad. (2013). An experience of teacher education on task design in Colombia. En C. Margolinas, A. Watson, M. Ohtani, J. Ainley, J. B. Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, P. Sullivan, D. Thompson y Y. Yang (Eds.), *Proceedings of ICMI Study 22. Task Design in Mathematics Education*, 571-579. Oxford, UK: ICMI.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128.
- Harlen, W. y Winter, J. (2004). The development of assessment for learning: learning from the case of science and mathematics. *Language Testing*, 21(3), 390-408.
- John, P. D. (2006). Lesson planning and the student teacher: re-thinking the dominant model. *Journal of Curriculum Studies*, 38(4), 483 - 498.
- Lesh, R. y Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind -In which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 205-226.

- Liljedahl, P., Chernoff, E. y Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: a tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 239-249.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Mousley, J. (2004). An aspect of mathematical understanding: The notion of "connected knowing". En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 377-384 Bergen: Bergen University College.
- Santos, L. (2011). Evaluar para aprender matemáticas. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 57, 32-42.
- Sherin, M. G. y Drake, C. (2009). Curriculum strategy framework: investigating patterns in teachers' use of a reform-based elementary mathematics curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, 41(4), 467-500.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal For Research in Mathematics Education*, 26 (2), 114-145.
- Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 91-104.
- Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurable fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 129-162.
- Suavita, M. A. (2012). *Aprendizaje de profesores sobre el organizador del currículo hipótesis de aprendizaje*. Tesis de master no publicada, Universidad de Granada, Granada.
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B. y O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4 (4), 133-142.
- William, D., Lee, C., Harrison, C. y Black, P. (2004). Teachers developing assessment for learning: impact on student achievement. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 11(1), 49-65.
- Wilson, P. H. (2009). Teachers' uses of a learning trajectory for equipartitioning. Tesis de doctorado no publicada, NCSU, North Carolina.
- Wilson, P. H., Sztajn, P. y Edgington, C. (2013). Designing professional learning tasks for mathematics learning trajectories. *PNA*, 7(4), 133-141.